УДК 519.21

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О.Л. Карелова, М.А. Банько

Ставропольский государственный университет
E-mail: norra7@yandex.ru

Получено операторное уравнение для плотности распределения решений системы линейных дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами, на базе которого выведены зависимости для моментов решений, позволяющие исследовать устойчивость решения рассматриваемой системы.

Исследованию устойчивости решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами посвящено много работ [1–5]. В известной литературе рассматриваются системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которых зависят от марковских цепей или марковских не-

прерывных процессов и получены условия устойчивости решений как в терминах моментных уравнений, так и в терминах функций Ляпунова.

В предлагаемой работе рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t, \varsigma(t))X(t), \qquad (1)$$

где $\varsigma(t)$ – полумарковский конечнозначный процесс, принимающий конечное число состояний $\theta_1,...,\theta_n$ в случайные моменты времени $t_0=0,t_1,t_2,...$, $(t_0<t_1<t_2<...)$. После попадания в состояние θ_s случайный процесс $\varsigma(t)$ попадает в следующее состояние в соответствии с матрицей условных вероятностей перехода П и независимо от предыдущего состояния θ_k. Описание полумарковских процессов и интервально-непрерывных вероятностей приводится в работах [1, 5].

Каждому ненулевому элементу π_{sk} матрицы условных вероятностей перехода

$$\Pi = \|\pi_{sk}\|_{s,k=1}^{n}$$

ставится в соответствие случайная величина T_{sk} – время пребывания в состоянии θ_k до перехода в состояние θ_s. При этом заданы функции распределения

$$F_{sk}(t) = P\{T_{sk} \le t\}, \quad (k,s=1,...,n).$$

Величина T_{sk} может быть распределена непрерывно или дискретно. Полагаем, что случайная величина T_{sk} неотрицательна и непрерывно распределена с плотностью распределения

$$f_{sk}(t) = \frac{dF_{sk}(t)}{dt}, \quad (k,s=1,...,n).$$

Полагаем также, что полумарковский случайный процесс $\varsigma(t)$ определяется интенсивностями перехода из состояния θ_k в состояние θ_s [1,5]

$$q_{sk}(t) = \pi_{sk} f_{sk}(t), \quad (s,k=1,...,n). \qquad (2)$$

При этом выполняются условия

$$q_{sk}(t) \ge 0, (t \ge 0), \int_0^\infty q_{sk}(t)dt = \pi_{sk}, (s,k=1,...,n).$$

Пусть $\varsigma(t)$ имеет скачки в моменты времени $t_0,t_1,t_2,...$, $(t_0=0<t_1<t_2<...)$.

Система ур. (1) распадается на n систем дифференциальных уравнений, соответствующих различным реализациям случайного процесса $\varsigma(t)$

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = A_k(t)X_k(t), \quad (k=1,...,n; t \ge 0). \qquad (3)$$

Для вывода общих формул предполагаем, что для систем (3) известны фундаментальные матрицы решений $N_k(t)$, определяющие решение систем (3)

$$X_k(t) = N_k(t)X_k(0), N_k(0) = E, \quad (k=1,...,n).$$

Если $\varsigma(t_j-0)=\theta_k$ и $\varsigma(t_j+0)=\theta_s$, то при $t_j \le t < t_{j+1}$ система ур. (1) принимает вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_s(t-t_j)X(t). \qquad (4)$$

Будем также предполагать, что в момент t_j скачка процесса $\varsigma(t)$ решение системы уравнений (1) имеет скачок, определяемый векторным уравнением

$$X(t_j+0) = C_{sk}X(t_j-0), \det C_{sk} \ne 0, (s,k=1,...,n). \qquad (5)$$

Пусть случайный процесс $X(t),\varsigma(t)$ имеет плотность распределения

$$f(t,X,\varsigma) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t,X)\delta(\varsigma-\theta_k),$$

где $\delta(\varsigma)$ – дельта-функция Дирака.

Выведем систему уравнений для частных плотностей $f_k(t,X)$, $(k=1,...,n)$ решения системы линейных дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами (1). Используем вектор частных плотностей вероятностей

$$F(t,X) = \begin{bmatrix} f_1(t,X) \\ .... \\ f_n(t,X) \end{bmatrix}$$

и рассмотрим последовательность векторов $F(t_j,X)$ $(j=0,1,2,...)$, где t_j – моменты скачков полумарковского процесса $\varsigma(t)$. В моменты скачков t_j $(j=0,1,2,...)$ вся предыстория случайного процесса $X(t),\varsigma(t)$ "забывается", т.е. не влияет на поведение решений системы (1) при $t>t_j$. Поэтому существует стохастический оператор $L(t) \in S^{+}_{Sn,L}$ такой, что

$$F(t_j+t) = L(t)F(t_j), (j=0,1,2,...; t \ge 0). \qquad (6)$$

Поскольку все моменты скачков t_j $(j=0,1,2,...)$ равновероятны, то для простоты изложения, в качестве начального момента времени возьмем $t_0=0$.

Система уравнений (6) принимает вид

$$F(t) = L(t)F(0), \quad (t \ge 0) \qquad (7)$$

или в скалярной форме

$$f_k(t,X) = \sum_{s=1}^{n} L_{ks}(t) f_s(0,X),$$

$$L_{ks}(t) \in S^{+}_{S,L}, (k=1,...,n; t \ge 0).$$

Пусть случайный процесс $\varsigma(t)$ при $t_0=0$ попадает в состояние θ_k. При этом выполнены следующие условия

$$f_l(0,X) \equiv 0 \ (l \ne k), f_k(0,X) \ge 0, \int_{E_m} f_k(0,X)dX = 1.$$

С вероятностью $\psi_{kk}(t)$ процесс $\varsigma(t)$ остается в состоянии θ_k в течение времени $t>0$ и с вероятностями $q_{sk}(\tau)d\tau$ в течение временного промежутка $[\tau,\tau+d\tau]$ переходит в состояние θ_s $(s=1,...,n)$. Кроме этого в момент скачка происходит скачок фазового вектора

$$X(\tau+0) = C_{sk}X(\tau-0), \quad (s=1,...,n).$$

Для частных плотностей получим выражение

$$f_k(t,X) = \psi_{kk}(t) f_k(0, N_k^{-1}(t)X) \det N_k^{-1}(t) +$$

$$+\int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{sk}(\tau) L_{ks}(t-\tau) f_k \times$$

$$\times(0, N_k^{-1}(t)C_{sk}^{-1}X) \det N_k^{-1}(\tau) \left|\det C_{sk}^{-1}\right| d\tau,$$

$$f_l(t,X)=\int_0^t\sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau)L_{ks}(t-\tau)f_k(0,N_k^{-1}(t)C_{sk}^{-1}X)\times \quad (8)$$
$$\times\det N_k^{-1}(\tau)\left|\det C_{sk}^{-1}\right|d\tau,\ (l\neq k, l=1,...,n).$$

Упростим запись системы ур. (8) с помощью введения специальных обозначений.

Введем в рассмотрение стохастические операторы $R_{kk}\in S_{SL}^{+}$ (k=1,...,n), $R_{sk}\in S_{SL}^{+}$ (s,k=1,...,n), определяемые формулами

$$R_{kk}f(X)\equiv f(N_k^{-1}(t)X)\det N_k^{-1}(t),\ (k=1,...,n),$$
$$S_{sk}f(X)\equiv f(C_{sk}^{-1}X)\left|\det C_{sk}^{-1}\right|,\ (s,k=1,...,n).$$

Операторы $R_{kk}\in S_{SL}^{+}$ (k=1,...,n) определяют изменение плотности распределения случайной векторной величины $X(t)$ при линейном преобразовании

$$X(t)=N_k(t)X(0),\quad (k=1,...,n).$$

Стохастические операторы $R_{sk}\in S_{SL}^{+}$, (s,k=1,...,n) определяют изменение плотности распределения при линейном преобразовании

$$Y=C_{sk}X,\quad (s,k=1,...,n).$$

Систему уравнений (8) можно переписать в виде

$$L_{kk}f_k(0,X)=\psi_{kk}(t)R_{kk}(t)f_k(0,X)+$$
$$+\int_0^t\sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau)L_{ks}(t-\tau)S_{sk}R_{kk}(\tau)f_k\ (0,X)d\tau,$$
$$L_{lk}f_k(0,X)=\int_0^t\sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau)L_{ks}(t-\tau)S_{sk}R_{kk}(\tau)f_k\ (0,X)d\tau,$$
$$(l\neq k; k,l=1,...,n)$$

или в операторной форме

$$L_{lk}f_k(0,X)=\delta_{lk}\psi_{kk}R_{kk}(t)f_k(0,X)+$$
$$\int_0^t\sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau)L_{ks}(t-\tau)S_{sk}R_{kk}(\tau)f_k\ (0,X)d\tau, \qquad (9)$$
$$(l,k=1,...,n).$$

Введем матрицы, элементами которых являются операторы

$$L(t)=\begin{bmatrix} L_{11}(t) & L_{12}(t) & ... & L_{1n}(t)\\ L_{21}(t) & L_{22}(t) & ... & L_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ L_{n1}(t) & L_{n2}(t) & ... & L_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

$$R(t)=\begin{bmatrix} R_{11}(t) & 0 & ... & 0\\ 0 & R_{22}(t) & ... & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & ... & R_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

$$S(t)=\begin{bmatrix} q_{11}(t)S_{11} & q_{12}(t)S_{12} & ... & q_{1n}(t)S_{1n}\\ q_{21}(t)S_{21} & q_{22}(t)S_{22} & ... & q_{2n}(t)S_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{n1}(t)S_{n1} & q_{n2}(t)S_{n2} & ... & q_{nn}(t)S_{nn}\end{bmatrix}.$$

Система ур. (9) выполняется, если выполняются операторные уравнения

$$L_{lk}(t)=\delta_{lk}\psi_{kk}R_{kk}(t)+\int_0^t\sum_{s=1}^n q_{sk}(\tau)L_{ks}(t-\tau)S_{sk}R_{kk}(\tau)d\tau,$$
$$(l,k=1,...,n),$$

которые можно записать в матричной форме

$$L(t)=\Psi(t)R(t)+\int_0^t L(t-\tau)S(\tau)R(\tau)d\tau, \qquad (10)$$

где обозначено

$$\Psi(t)=\begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & 0 & ... & 0\\ 0 & \psi_{22}(t) & ... & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & ... & \psi_{nn}(t)\end{bmatrix}.$$

Используя равенство (7), можно записать систему уравнений для вектора частных плотностей $F(t,X)$

$$F(t,X)=\Psi(t)R(t)F(0,X)+$$
$$+\int_0^t L(t-\tau)S(\tau)R(\tau)F(0,X)d\tau.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы линейных дифференциальных уравнений* (1) *зависят от полумарковского конечнозначного случайного процесса* $\varsigma(t)$, *который определен заданными интенсивностями* $q_{sk}(t)$, (s,k=1,...,n). *Пусть между двумя последовательными скачками случайного процесса* $\varsigma(t)$ *при* $t_j\leq t<t_j+1$ *при* $\varsigma(t)=\theta_s$ *система уравнений* (1) *совпадает с системой* (4). *Пусть решения системы уравнений* (1) *имеют скачки вида* (5), *происходящие одновременно со скачками процесса* $\varsigma(t)$. *Тогда частные плотности* $f_k(t,X)$, (k=1,...,n) *случайного процесса* ($X(t)$,$\varsigma(t)$) *определяются уравнением*

$$F(t,X)=L(t)F(0,X),$$

где оператор $L(t)$ *удовлетворяет операторному уравнению* (10).

Операторное уравнение (10) можно решать методом последовательных приближений, который лишь в исключительных случаях может дать решение в замкнутой форме. Преобразуем ур. (10) к более удобному для вывода моментных уравнений виду.

Теорема 2. *Решение ур.* (10) *можно представить в виде*

$$L(t)=\Psi(t)R(t)+\int_0^t \Psi(\tau)R(\tau)U(t-\tau)d\tau, \qquad (11)$$

где оператор $U(t)$ *удовлетворяет интегральному операторному уравнению*

$$U(t)=S(t)R(t)+\int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)U(\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Доказательство. Подставим выражение (11) в ур. (10). Ур. (10) будет выполнено, если будет справедливо равенство

$$\int_0^t \Psi(\tau)R(\tau)U(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \Psi(t-\tau)R(t-\tau)S(\tau)R(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \Psi(s)R(s)U(t-\tau-s)ds \right) S(\tau)R(\tau)d\tau. \quad (13)$$

Изменим порядок интегрирования в двойном интеграле и получим равенства

$$\int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \Psi(s)R(s)U(t-\tau-s)ds \right) S(\tau)R(\tau)d\tau =$$

$$\int_0^t \Psi(s)R(s)ds \left(\int_0^{t-s} U(t-\tau-s)S(\tau)R(\tau)d\tau \right) =$$

$$= \int_0^t \Psi(t-\tau)R(t-\tau)d\tau \left(\int_0^t U(t-s)S(s)R(s)ds \right),$$

с помощью которых ур. (13) можно записать следующим образом

$$\int_0^t \Psi(t-\tau)R(t-\tau)U(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t \Psi(t-\tau)R(t-\tau)S(\tau)R(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t \Psi(t-\tau)R(t-\tau)d\tau \left(\int_0^t U(t-s)S(s)R(s)ds \right).$$

Очевидно, что это уравнение справедливо, если

$$U(t) = S(t)R(t) + \int_0^t U(t-\tau)S(\tau)R(\tau)d\tau. \quad (14)$$

Будем искать решение операторного уравнения (14) в виде

$$U(t) = S(t)R(t) + \int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)V(\tau)d\tau. \quad (15)$$

Подставляя (15) в ур. (14), получим уравнение

$$\int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)V(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)S(\tau)R(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} S(s)R(s)V(t-\tau-s)ds \right) S(\tau)R(\tau)d\tau. \quad (16)$$

Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим равенства

$$\int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} S(s)R(s)V(t-\tau-s)ds \right) S(\tau)R(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t S(s)R(s)ds \left(\int_0^{t-s} V(t-\tau-s)S(\tau)R(\tau)d\tau \right) =$$

$$= \int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)d\tau \left(\int_0^{t-s} V(t-s)S(s)R(s)ds \right).$$

Используя эти равенства в ур. (16), приходим к операторному уравнению для оператора $V(t)$

$$V(t) = S(t)R(t) + \int_0^t V(t-\tau)S(\tau)R(\tau)d\tau. \quad (17)$$

Сопоставляя ур. (14) и (17), видим, что можно положить $U(t) \equiv V(t)$. При этом замену (15) можно рассматривать как операторное уравнение (11)

$$U(t) = S(t)R(t) + \int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)U(\tau)d\tau,$$

что и доказывает справедливость теоремы.

Замечание. Операторное уравнение (14) можно записать в виде

$$U(t) = S(t)R(t) + \int_0^t U(\tau)S(t-\tau)R(t-\tau)d\tau.$$

Сравнивая это уравнение с ур. (12), видим, что в ур. (12) можно переставить операторы $U(\tau)$ и $S(t-\tau)R(t-\tau)$ в подынтегральном выражении.

Для вывода моментных уравнений умножим операторные уравнение (11) и (12) справа на вектор $F(0,X)$ и получим систему уравнений

$$\begin{gathered} F(t,X) = \Psi(t)R(t)F(0,X) + \\ +\int_0^t \Psi(t-\tau)R(t-\tau)H(\tau,X)d\tau, \\ H(t,X) = S(t)R(t)F(0,X) + \\ +\int_0^t S(t-\tau)R(t-\tau)H(\tau,X)d\tau, \end{gathered} \quad (18)$$

где $F(t,X) = L(t)F(0,X),\ H(t,X) = U(t)F(0,X)$.

Используя обозначения

$$F(t,X) = \begin{bmatrix} f_1(t,X) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(t,X) \end{bmatrix}, \quad H(t,X) = \begin{bmatrix} h_1(t,X) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_n(t,X) \end{bmatrix},$$

можно записать систему ур. (18) в скалярной форме

$$\begin{gathered} f_k(t,X) = \psi_{kk}(t)R_{kk}(t)f_k(0,X) + \\ +\int_0^t \psi_{kk}(t-\tau)R_{kk}(t-\tau)h_k(\tau,X)d\tau, \\ h_k(t,X) = \sum_{s=1}^n q_{ks}(t)S_{ks}R_{ss}(t)f_s(0,X) + \\ \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau)S_{ks}R_{ss}(t-\tau)h_s(\tau,X)d\tau, \\ (k=1,\ldots,n). \end{gathered} \quad (20)$$

Систему ур. (20) для частных плотностей распределения $f_k(t,X)$, $(k=1,\ldots,n)$ можно непосредственно использовать для вывода моментных уравнений при условии, что $R_{kk} \in S_{SL}^{(q)}$, $(k=1,\ldots,n)$, $R_{sk} \in S_{SL}^{(q)}$, $(s,k=1,\ldots,n)$.

Вектор моментов первого порядка

$$M(t) \equiv \langle X(t) \rangle = \int_{E_m} Xf(t,X)dX$$

можно выразить через частные моменты $M_k(t)$, (k=1,...,n) первого порядка

$$M(t)=\sum_{k=1}^{n} M_k(t),\ M_k(t)=\int_{E_m} Xf_k(t,X)dX,\ (k=1,...,n)$$

так как

$$f(t,X)=\sum_{k=1}^{n} f_k(t,X).$$

Аналогично матрицу моментов второго порядка

$$D(t)\equiv\left\langle X(t)X^*(t)\right\rangle=\int_{E_m} XX^* f(t,X)dX$$

можно выразить через матрицы частных моментов второго порядка

$$D(t)=\sum_{k=1}^{n} D_k(t),\quad D_k(t)=\int_{E_m} XX^* f_k(t,X)dX.$$

Введем вспомогательные векторы

$$V_k(t)=\int_{E_m} Xh_k(t,X)dX,\quad (k=1,...,n)$$

и вспомогательные матрицы

$$W_k(t)=\int_{E_m} XX^* h_k(t,X)dX,\quad (k=1,...,n).$$

Умножим систему уравнений (20) на вектор X и проинтегрируем полученные равенства по всему пространству E_m. Используем следующие равенства

$$\int_{E_m} Xf_k(t,X)dX=M_k(t),\ (k=1,...,n),$$

$$\int_{E_m} XR_{kk}(t)f_k(0,X)dX=$$

$$=\int_{E_m} Xf_k(0,N_k^{-1}(t)X)\det N_k^{-1}(t)dX=$$

$$=\int_{E_m} N_k(t)Yf_k(0,Y)dY=N_k(t)M_k(0),\ (k=1,...,n).$$

При выводе использовалась замена $Y=N_k(t)X$. Аналогично можно получить равенства

$$\int_{E_m} XR_{kk}(t-\tau)h_k(\tau,X)dX=$$

$$=\int_{E_m} Xh_k(\tau,N_k^{-1}(t-\tau)X)\det N_k^{-1}(t-\tau)dX=$$

$$=\int_{E_m} N_k(t-\tau)Yh_k(\tau,Y)dY=N_k(t-\tau)V_k(\tau),$$

$$(k=1,...,n),$$

$$\int_{E_m} XS_{ks}R_{ss}f_s(0,X)dX=$$

$$=\int_{E_m} Xf_s(0,N_s^{-1}(t)C_{ks}^{-1}X)\det N_s^{-1}(t)\left|\det C_{ks}^{-1}\right|dX=$$

$$=\int_{E_m} C_{ks}N_s(t)Yf_s(0,Y)dY=C_{ks}N_s(t)M_s(0),$$

$$(k,s=1,...,n),$$

$$\int_{E_m} XS_{ks}R_{ss}(t-\tau)h_s(\tau,X)dX=$$

$$\int_{E_m} Xh_s(\tau,N_s^{-1}(t-\tau)C_{ks}^{-1}X)\det N_s^{-1}(t-\tau)\left|\det C_{ks}^{-1}\right|dX=$$

$$=\int_{E_m} C_{ks}N_s(t-\tau)Yh_s(\tau,Y)dY=C_{ks}N_s(t-\tau)V_s(\tau),$$

$$(k,s=1,...,n).$$

Окончательно приходим к системе интегральных уравнений

$$M_k(t)=\psi_{kk}(t)N_k(t)M_k(0)+$$
$$+\int_0^t \psi_{kk}(t-\tau)N_k(t-\tau)V_k(\tau)d\tau$$
$$V_k(t)=\sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t)C_{ks}N_s(t)M_s(0)+$$
$$\int_0^t\sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau)C_{ks}N_s(t-\tau)V_s(\tau)d\tau, \tag{21}$$
$$(k=1,...,n),$$

которые определяют частные моменты первого порядка $M_k(t)$, (k=1,...,n).

Аналогично находим систему матричных интегральных уравнений для матриц частных моментов второго порядка $D_k(t)$, (k=1,...,n)

$$D_k(t)=\psi_{kk}(t)N_k(t)D_k(0)N_k^*(t)+$$
$$+\int_0^t \psi_{kk}(t-\tau)N_k(t-\tau)W_k(\tau)N_k^*(t-\tau)d\tau,$$
$$W_k(t)=\sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t)C_{ks}N_s(t)D_s(0)N_s^*(t)C_{ks}^*+$$
$$+\int_0^t\sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau)C_{ks}N_s(t-\tau)W_s(\tau)N_s^*(t-\tau)C_{ks}^*d\tau, \tag{22}$$
$$(k=1,...,n).$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда математическое ожидание*

$$M(t)\equiv\left\langle X(t)\right\rangle=\sum_{k=1}^{n} M_k(t)$$

случайного решения системы (1) *определяется системой интегральных уравнений* (21), *а матрица вторых начальных моментов*

$$D(t)\equiv\left\langle X(t)X^*(t)\right\rangle=\sum_{k=1}^{n} D_k(t)$$

определяется системой интегральных уравнений (22).

Замечание. Если в системе ур. (1) отсутствуют скачки решений (5), то в формулах (21) и (22) следует положить $C_{ks}=E$, (k,s=1,...,n), где E – единичная матрица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во РУДН, 1996.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наукова думка, 1968.
3. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург, 1998.
4. Мильштейн Г.Н., Репин Ю.М. О воздействии марковского процесса на систему дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 8. – С. 1371–1384.
5. Тихонов В.И. Миронов В.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977.